ственные внутренние регулирующие механизмы (например, внутривидовая конкуренция или эпизоотии), ограничивающие рост ее численности. Но в этом случае, если бы ограничивающие численность факторы не действовали (или оказывали влияние при достаточно больших численностях) и популяция жертвы в отсутствие хищника росла бы экспоненциально, приводит ли воздействие хищника к стабилизации всей системы в целом? Остаются ли ограниченными численности обоих видов, и не вымирает ли один из них или оба? Ответы на эти вопросы и составляют решение проблемы «может ли хищник регулировать численность жертвы».

Наконец, последний вопрос: «Приведут ли случайные возмущения среды к развалу системы хищник — жертва или оба будут сохраняться?» — рассматривается в рамках анализа уравнений системы хищник — жертва со случайными возмущениями параметров.

§ 2. Классическая модель Вольтерра

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — численность жертв и хищников соответственно. Предположим, что единственным лимитирующим фактором, ограничивающим размножение жертв, является давление на них со стороны хищников, а размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (количеством жертв). Тогда в отсутствие хищников численность жертв должна расти экспоненциально с относительной скоростью α, а хищники в отсутствие жертв — также экспоненциально вымирать с относительной скоростью m. Коэффициенты α и m — коэффициенты естественного прироста жертв и естественной смертности хищников соответственно.

Пусть $V = V(x)$ — количество (или биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k-я часть полученной с этой биомассой энергии расходуется хищником на воспроизводство, а остальное тратится на поддержание основного обмена и охотничей активности. Тогда уравнение системы хищник — жертва можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - V(x)\,y, \\ \frac{dy}{dt} &= y\,(kV(x) - m). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Функцию $V(x)$ обычно называют трофической функцией хищника или функциональным откликом (functional responce) хищника на плотность популяции жертвы. Именно эти функции обычно определяются в экспериментальных работах, посвященных изучению хищничества, и к настоящему времени считается установленным, что эти функции обычно принадлежат к одному из следующих трех типов (рис. 11). По-видимому, динамическое поведение системы в значительной степени зависит от вида трофической функции.

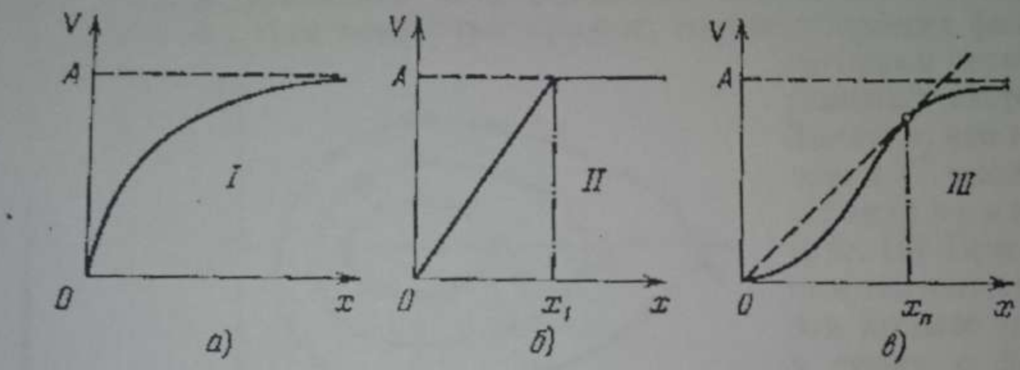


Рис. 11. Различные типы трофических функций в системе хищник — жертва: *а*) этот тип характерен для беспозвоночных и некоторых видов хищных рыб; *б*) трофическая функция с резко выраженным порогом насыщения характерна для хищников-фильтраторов (например, многих моллюсков); *в*) такой тип характерен для позвоночных — организмов, проявляющих достаточно сложное поведение (например, способных к обучению). Аналогичный вид будет иметь трофическая функция, если жертвы могут вырабатывать защитную стратегию (например, прятаться в убежище, недоступное хищникам).

При малых, значениях x, например, когда трофические отношения в системе напряжены и почти все жертвы становятся добычей хищника, который всегда голоден и насыщения не наступает (ситуация довольно обычная в природе), трофическую функцию $V(x)$ можно считать линейной функцией численности жертв, т. е. $V = \beta x$. Кроме того, предположим, что $k = \mathrm{const}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k\beta xy - my. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Система (2.2) с точностью до обозначений совпадает с классической моделью хищник — жертва В. Вольтерра, который показал, что эта система имеет интеграл вида

$$\left(\frac{e^X}{X}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha = C, \qquad (2.3)$$

см. 3 2 и стр. 96

где $X = x/x^*$, $Y = y/y^*$, $x^* = m/k\beta$, $y^* = \alpha/\beta$. Если x_0, y_0 — начальные значения численностей жертв и хищников соответственно, то

$$C = \left(\frac{e^{x_0/x^*}}{x_0/x^*}\right)^m \left(\frac{e^{y_0/y^*}}{y_0/y^*}\right)^\alpha > 0$$

и уравнение (2.3) описывает семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, соответствующих фазовым траекториям периодических решений системы (2.2). Заметим, что при увеличении C амплитуды колебаний x и y возрастают (рис. 12). При минимальном значении $C^* = e^{(m+\alpha)}$ эти кривые стягиваются в точку с координатами (x^*, y^*). Легко видеть, что $x^* = m/k\beta$ и $y^* = \alpha/\beta$ являются решениями системы (2.2) при $dx/dt = dy/dt = 0$, т. е. ее нетривиальным

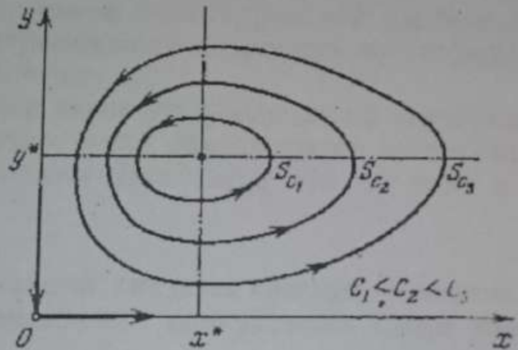


Рис. 12. Фазовый портрет классической вольтерровской системы хищник — жертва.

равновесием. Для случая малых колебаний возле этого состояния ($p = x - x^*$, $q = y - y^*$) уравнения модели можно записать в виде

см. приложение к стр. 96

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m}{k}q, \qquad \frac{dq}{dt} = k\alpha p. \qquad (2.4)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения есть $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha m}$, т. е. точка (x, y) — центр. Период малых колебаний $T = 2\pi/\sqrt{\alpha m}$, причем колебания численности одного вида сдвинуты по фазе относительно колебаний другого на $\pi/2$.

В системе (2.2) имеется еще одно положение равновесия — начало координат. Нетрудно видеть, что эта точка — седло. Оси кооординат являются сепаратрисами, причем ось Oy входит в седло, а ось Ox — выходит из него (см. рис. 12).

Несмотря на то, что модель Вольтерра смогла объяснить многие реально наблюдавшиеся явления, у нее есть большой недостаток — негрубость (в математическом смысле этого слова) вольтерровских циклов, так что при любых сколь угодно слабых возмущениях фазовых координат система переходит с одного цикла на другой. По-видимому, более адекватные модели должны обладать этим свойством «грубости».

С точки зрения теории устойчивости состояние равновесия системы (x^*, y^*) — это состояние безразличного равновесия, устойчивое по Ляпунову, но не асимптотически. Отсутствие асимптотической устойчивости равновесия указывает на то, что в вольтерровской системе отсутствуют механизмы, стремящиеся сохранить ее нетривиальное равновесное состояние.

Высказанное выше утверждение об устойчивости равновесия достаточно легко доказывается построением соответствующей функции Ляпунова. Но об этом в следующем параграфе.

§ 3. Стабилизация системы хищник — жертва введением внутривидовой конкуренции среди жертв

Уже из простейшего анализа предпосылок, положенных в основу вольтерровской модели, ясна их условность. Например, в отсутствие хищников численность жертв может неограниченно возрастать. В действительности этого не происходит, поскольку любая популяция существует в условиях ограниченности ресурсов (пища, пространство и т. п.), что и лимитирует ее численность. С другой стороны, количество жертв, потребляемых в единицу времени хищником, может возрастать до бесконечности при возрастании численности жертв, что тоже неверно, поскольку существуют чисто физиологические ограничения.

Наиболее интересный качественный вывод Вольтерра о незатухающих колебаниях численностей, к сожалению, является следствием выбора специальной формы уравнений модели.

Можно показать, что, например, введение в вольтерровскую модель внутривидовой конкуренции среди жертв, возникающей из-за ограниченности ресурсов, делает модель

Билет

Вывод трех законов Ньютона из принципа наименьшего действия

N материальных точек

r - радиус вектор (x, y, z)

$v = \frac{dr}{dt}$ - скорость

$\frac{d^2r}{dt^2}$ - ускорение

$q_1, \ldots, q_n$ - обобщенные координаты

n степеней свободы

опр-т полож. в опр. мом.

$\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ - обобщенные скорости

$F_k(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$, $k = \overline{1, n}$

$\Phi_i(q, \dot{q}, t)\ddot{q}_i + \Psi_i(q, \dot{q}, t) = 0$ т.к. разрешимо отн. но $\ddot{q}_i$

Принцип наименьшего действия [п. Гамильтона]

$t = t_1$, $t = t_2$, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$

положение

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \qquad (1)$$

действие

траектория, доставляющая минимум интегралу

[для $q^{(1)} \longrightarrow q^{(2)}$]

ф. Лагранжа

Необх-е усл-е экстремальности (1) - обращение в нуль его первой вариации

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt = 0$$

$$(\delta S)_i = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0$$

т.к. $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ + проинт. по частям 2й член

$= 0$, т.к. $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$

$$(\delta S)_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt = 0$$

$$(\delta S)_i = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$\int = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \equiv 0$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = \overline{1, n} \right\} \text{уравнение Лагранжа}$$

① пусть мат (·)ка свободная (т.е. не подвергающаяся внешним воздействиям) в A (·)ке пространства находясь в покое, будет пребывать как угодно долго

• изотропность + однородность пространства (2)
• однородность времени (3)

$\Downarrow$

ф. Лагранжа не будет зависеть от координаты и времени, и от направления вектора скорости
[т.е. только от модуля скорости]

$$L = L(v^2)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v} = const$$

но т.к. $L = L(v^2) \Rightarrow v = const$ — I з. Ньютона.

Т.о. при (2), (3) всякое свободное движение мат (·)ки происходит с постоянной по величине и направлению скорости.

② инерц. с-о-с, по отношению к кот. пространство однородно, изотропно, а время однородно.

$v' = v + V$

нов. в k' — в k — скор. k' отн. k

$L' = L(v'^2) = L((v+V)^2)$ — по формуле конечных приращений

$$L[(v+V)^2] = L(v^2) + 2\frac{dL(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=(v+V^*)^2}(v+V^*)V$$

полн. произв. по времени

$V^*(v)$ — лин. ф-я скорости v

$\frac{dL(\xi)}{d\xi} = const$, $\frac{dL(v^2)}{dv^2}$ не зав-т от $v^2 \Leftrightarrow L \sim v^2$

∃ коэф. пропор-ти $\frac{m}{2}$ ⇒

$$L = \frac{mv^2}{2}$$

m - масса мат (·)ки

⇓

$$L = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2}$$

∃ теперь система в/д (·)ек

$$L = \underbrace{\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2}}_{\text{кинетическая энергия}} - \underbrace{U_B(r_1, \ldots, r_N)}_{\text{потенциальная энергия}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_a} - \frac{\partial L}{\partial r_a} = 0, \quad a = \overline{1,N}$$

⇓

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial U_B}{\partial r_a}, \quad a = \overline{1,N}$$

F_a - сила действ-я на а-ю мат. (·)ку.

2ой з Ньютона

③ з импульса

$$\sum_{a=1}^{N} F_a = 0$$

стр 4

Билет

Примеры уравнений эллиптического типа.
Решение внутренней задачи Дирихле на круге.

- уравнение Лапласа $\Delta u = 0$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – оператор Лапласа

- уравнение Пуассона $\Delta u = -f$

$f = \frac{F}{k}$ – F – плотность тепловых источников; k – коэф. теплопроводности

- объем T, ограниченный поверхностью Σ
$u(x,y,z)$ – распределение температуры внутри T

$\Delta u = -f(x,y,z)$

$u = f_1$ на Σ

} первая краевая задача (з. Дирихле)

Если внутри область T_0 отн-но Σ => з. внутренняя.

- потенциальное течение жидкости без источников

объем T, граница Σ
внутри несжимаемая жидкость ($\rho = const$)
$v(x,y,z)$ – скорость

стр 1

если течение не вихревое => $v = -\operatorname{grad} \varphi$
φ – скал. ф-я потенциал скорости

если отсутствуют источники => $\operatorname{div} v = 0$

$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow$ удов. ур-ю Лапласа

$f(x,y,z)$, $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Билет

Билет

Паутинная модель рынка.

(1-1)

- однородная проводящая среда, протекает стационарный ток

заряд не накапливается =>

$\operatorname{div}(j) = 0$

эл. поле $E = \frac{j}{\lambda}$ [по з. Ома]

λ — проводимость среды

λ^{-1} - сопротивление

т.к. стац процесс => эл. поле - безвихревое [потенци-ое]

т.е $\exists\, \varphi(x,y,z) : E = -\operatorname{grad}\varphi$, $(j = -\lambda \operatorname{grad}\varphi)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \varphi \in [0, 2\pi),\ \rho \in (0, R) \\ u(\rho_0, \varphi) = f(\varphi) \end{cases}$$

~~$u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$~~

$R = \rho_0$

$\varphi \in [0;\ 2\pi]$

по м Фурье $\exists$ решение $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)$

(ρ, φ) - полярные координаты

$\Delta u = 0 \iff \Delta\left[R(\rho)\,\Phi(\varphi)\right] = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\Phi(\varphi)\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho}\right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\Phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \dot{R}) + \frac{R}{\rho^2}\ddot{\Phi} = 0 \quad \Big|\, : R\Phi$$

$$\partial_\rho \dot{R} = \dot{R}\,\partial\rho + \rho\,\partial\dot{R} = \dot{R} + \rho\ddot{R}$$

стр 2

$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \dot{R}) + \frac{1}{\rho^2 \Phi}\ddot{\Phi} = 0$$

$$\frac{\dot{R} + \rho\ddot{R}}{\rho R} = -\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}$$

$$\frac{1}{\rho R}\dot{R} + \frac{1}{R}\ddot{R} + \frac{1}{\rho^2\Phi}\ddot{\Phi} = 0$$

$$\frac{\rho\dot{R} + \rho^2\ddot{R}}{R} = -\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = \lambda$$

Билет

Билет

$$-\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = \lambda$$

$$-\ddot{\Phi} - \lambda\Phi = 0$$

$$\ddot{\Phi} + \lambda\Phi = 0$$

$$\beta^2 + \lambda = 0$$

$$\beta^2 = -\lambda$$

$$\beta = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$\Phi(\varphi) = a\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + b\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$$

$R(\rho)\Phi(\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi) \Rightarrow \Phi$ - периодичная $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = n^2, \ n \in \mathbb{Z}, \ n \geq 0$

$$\rho^2 \ddot{R} + \rho\dot{R} - n^2 R = 0$$

$n \neq 0 \Rightarrow R(\rho) = \rho^\mu$

⇓ подставив в $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^2 = n^2$ или $\mu = \pm n \ (n>0)$

$$R(\rho) = c\rho^n + D\rho^{-n}$$

- внутри $D = 0$, $u_n = \rho^n (A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))$
- вне $C = 0$, $u_n = \rho^{-n}(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))$

$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$, $A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi$, $n>0$

$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi$ стр 3.

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))$$

в цилиндрических координатах, при том же усл. $u = u(r)$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = C_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{C_1}{\rho} \Rightarrow u = C_1 \ln \rho + C_2$$

$u = C \ln \rho$ – потенциал поля создаваемый проводником бесконечной длины.

<u>Задача.</u>

$u(\rho, \varphi)$ – будем искать

$$\begin{cases} u(a, \varphi) = f(\varphi) \text{ – на границе} \\ \Delta u = 0 \end{cases}$$

(здесь у нас полярные координаты – как цилиндрические, но без z => цилиндрич. без нач. след.)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$ – будем искать методом раздел. переменных

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\Phi(\varphi)\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + R(\rho)\frac{1}{\rho}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}{R/\rho} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

Нужно учитывать, что $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$

$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$

$\Phi = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$

$\sqrt{\lambda} = n, \quad \lambda = n^2$

Т.о. $\Phi(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$

$R = \rho^{\mu}$ - будем искать в таком виде.

Если подставить $\lambda = n^2$ => $\mu^2 = n^2$ => $\mu = \pm n$.

$R_n(\rho) = C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}$.

1) внутрен. задача: $C_n\rho^n$ (при $\rho \to 0$)

2) внешняя задача: $D_n\rho^{-n}$ (при $\rho \to \infty$)

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \text{ (внутр.)}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^{-n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \text{ (внешн.)}$$

Для внутр. задачи:

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}a^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$$

$\parallel$

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,d\xi\,,\quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)\,d\xi$$

$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)\,d\xi$. Тогда мы получаем:

$A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}$, $B_n = \frac{\beta_n}{a^n}$, $A_0 = \frac{\alpha_0}{2}$ внутр.

$A_n = \alpha_n a^n$, $B_n = \beta_n a^n$, $A_0 = \frac{\alpha_0}{2}$ - внешн.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(\rho,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n(\varphi)) & \text{- внутр.} \\ \text{—〃—〃—} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n \text{—〃—} & \text{внешн.} \end{array}}$$

<u>Примеры к этой задаче.</u>

1) $f(\varphi) = u_0 \Rightarrow \alpha_n = 0,\ \beta_n = 0,\ n = 1, 2 \ldots$

$\alpha_0 = 2u_0$.

2) $f(\varphi) = u_0\sin(n_0\varphi)$, $n_0 \geq 1$

$$\alpha_0 = \frac{u_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin n_0\varphi\,d\varphi = \frac{u_0}{\pi n_0}\left[\cos(n_0\pi) - \cos(n_0\pi)\right] = 0.$$

$$\alpha_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots;\quad \beta_n = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$$u(\rho,\varphi) = u_0\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n_0}\sin(n_0\varphi)$$

Билет

Вывод закона сохранение энергии из принципа наименьшего действие и однородности времени

Однородность времени означает, что функция Лагранжа замкнутой системы не зависит явно от времени

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{a=1}^{N}\left\langle\frac{\partial L}{\partial r_a};\vec{\dot{V}}_a\right\rangle+\sum_{a=1}^{N}\left\langle\frac{\partial L}{\partial v_a};\dot{\vec{V}}_a\right\rangle + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^{=0} \qquad (1)$$

полная произв. я ф. Л. по времени

$$\frac{d}{d}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_a} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0, \quad a = \overline{1,N}$$ [ур-е д-я замкн. системы мат. точек]

подставим в (1)

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{a=1}^{N}\left\langle\vec{V}_a;\frac{d}{d}\frac{\partial L}{\partial V_a}\right\rangle+\sum_{a=1}^{N}\left\langle\frac{dL}{\partial V_a};\dot{\vec{V}}_a\right\rangle = \sum_{a=1}^{N}\frac{d}{dt}\left\langle\frac{\partial L}{\partial v_a};\vec{V}_a\right\rangle =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}\left\langle\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_a};\vec{V}_a\right\rangle$$

$$\Downarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{a=1}^{N}\left\langle\vec{V}_a;\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_a}\right\rangle - L\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{a=1}^{N}\left\langle\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_a};\vec{V}_a\right\rangle - L = const$$

$$\sum_{a=1}^{N}\langle m_a\vec{V}_a;\vec{V}_a\rangle - \underbrace{\sum_{a=1}^{N}\frac{m_a\vec{V}_a^2}{2} + U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n)}_{L} = const$$

консервативные механические системы – системы, энергии которых сохраняются

$U(\vec{V})$ – менейная функция скорости $\vec{v}$ стр 1

Билет

$$E = \underbrace{\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2}}_{\text{кинет. энергия}} + \underbrace{U(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_N})}_{\text{потенц. энергия системы}} = const$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt$$ – действие

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}$$ ур-е Лагранжа (17 в ВИ)

Билет

Билет

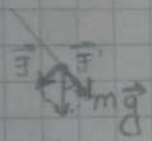
Примеры уравнений колебаний (мат маятник, грузик на жесткой пружине, жидкость в сообщающихся сосудах, колебание заряда в электрическом контуре, колебание численности сотрудников в фирме. Решение однородного уравнения колебаний.

• мат. маятник

• материальная (.)ка
• нерастяжимая / невесомая нить

$\cos\alpha = \frac{x}{l} \Rightarrow x = l\cos\alpha$

$h = l - x = l - l\cos\alpha$



$U = mgh = mgl(1-\cos\alpha)$

$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2}$

$E_k + E_n = const$

$E_k' + E_n' = 0$

$\left(\frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2}\right)' + (mgl(1-\cos\alpha))' = 0$

$\cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\alpha}^2 + \cancel{m}g\cancel{l}\sin\alpha = 0$

$\ddot{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0$ – ур-е маятника

отр 1

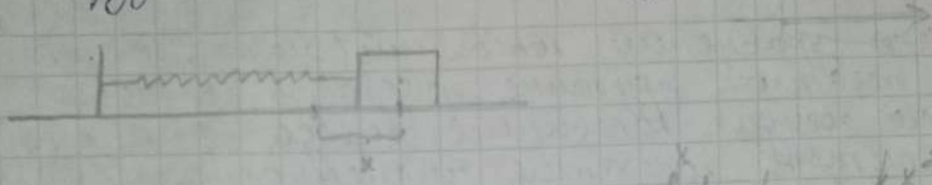
$\sin\alpha \approx \alpha$
при малых α

⇓

можно $\ddot{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\alpha = 0$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\ddot{\alpha}^2 + \omega_0^2\alpha = 0$

• грузик на жёсткой пружине



растягивание: работа $\int_0^x kz\,dz = \frac{kx^2}{2}$ – э.пот

кин.э. $\frac{mv^2}{2}$ $\quad v=\frac{dx}{dt}=\dot{x} \quad \frac{m\dot{x}^2}{2}$

$m\ddot{x} = -kx$ [з. Гука $F=-kx$]

$m\ddot{x} + kx = 0$ однородное ур-е колебаний

с $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$D = -4\omega_0^2$

$\lambda_{1,2} = \frac{\pm 2i\omega_0}{2}$

$x(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$

a, b – ? нач. усл-я: $x(0) = x_0 \Rightarrow b = x_0$

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow a = 0$

$x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

$x(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$\dot{x}(0) = v \Rightarrow a\omega_0 = v, \quad a = \frac{v}{\omega_0}$

$\boxed{x(t) = \frac{v}{\omega_0}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$

стр 2

$f(x,y,z)$, $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ $\quad \operatorname{div}\operatorname{grad} \varphi = 0$

$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}f_x + \frac{\partial}{\partial y}f_y + \frac{\partial}{\partial z}f_z$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Билет

Паутинная модель рынка.

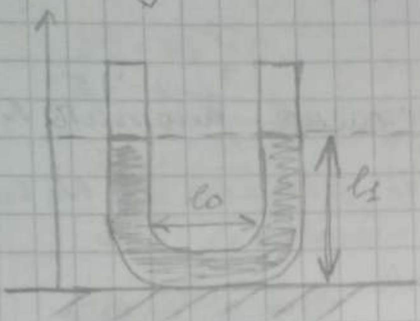
Фирма:

за ед. продукта в период (t+1)

способна произвести

управляющий парамет

• жидкость в сообщающихся сосудах



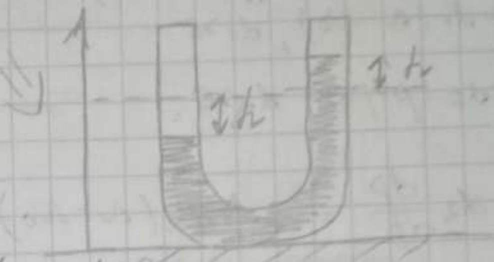
S - сечение трубки

M_0 - масса жидкости

ρ_0 - плотность жидкости

g - уск. св. пад

P_0 - атм давление } const



$$E_k = \frac{M\dot{h}^2}{2}$$

→ вес воды (h+h)

$$p(h)\,dh = dA$$

$$A = \int_0^x p(h)\,dh = \int_0^x 2h\rho g S\,dh = \rho g S x^2$$ - пот эн

работа, если поршень переместить на dh

$$L = \frac{M\dot{x}^2}{2} - \rho g S x^2$$

давление $= \frac{\text{вес}}{\text{площадь}}$

вес = дав × площ.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$p(h) = \rho g h$

$P = \rho g h S$

$$M\ddot{x} = -2\rho g S x$$

$$\ddot{x} + \frac{2\rho g S}{M}x = 0$$

$$M = S(2l_1 + l_0)\rho$$

$$\frac{2\rho g S}{S(2l_1+l_0)\rho} = \frac{2g}{2l_1+l_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{2l_1 + l_0}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

стр3.

билет

билет

• колебания численности сотрудников в фирме

$p(t)$ - з/п , $N(t)$ - число занятых

равновесие рынка: за $p_0>0$ согласны работать $N_0>0$

если равновесие наруш => $N(t), p(t)$ отходят от N_0, p_0

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\alpha_1 (N-N_0), \alpha_1>0 & \text{- изм з/п} \\ \frac{dN}{dt} = \alpha_2 (p-p_0), \alpha_2>0 & \text{- изм числ раб-ов} \end{cases}$$

$$\frac{dp^2}{dt} = \frac{d[-\alpha_1(N-N_0)]}{dt}$$

$$\frac{d^2N}{dt^2} = \alpha_2 \frac{dp}{dt} = -\alpha_1\alpha_2 (N-N_0)$$

$$\frac{d^2N}{dt^2} = \frac{d[\alpha_2(p-p_0)]}{dt} = \frac{\alpha_2 \, dp}{dt} = -\alpha_2\alpha_1(N-N_0)$$

стано. модель колебаний

$z_1 = N-N_0$

$\ddot{z}_1 + \alpha_1\alpha_2 z_1 = 0$

Ан-но

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\alpha_1 \frac{dN}{dt} = -\alpha_1\alpha_2(p-p_0)$$

$z_2 = p-p_0$

$\ddot{z}_2 + \alpha_1\alpha_2 z_2 = 0$

$\ddot{z}_1 + \alpha_1\alpha_2 z_1 = 0$

$\ddot{z}_2 + \alpha_1\alpha_2 z_2 = 0$

$\alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 = const > 0$

$\alpha_1 z_1 \dot{z}_1 + \alpha_2 z_2 \dot{z}_2 = 0$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{N} = \alpha_2 (p-p_0) \\ \dot{z}_2 = \dot{p} = -\alpha_1 z_1 \end{cases}$$

стр 4.

$f(x,y,z)$, $\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ div grad

$\text{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z$, div grad f

$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) =$

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$D = -4\omega_0^2$

$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$ однородное ур-е колебаний

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$D = -4\omega_0^2$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4\omega_0^2}}{2} = \frac{\pm 2\omega_0\sqrt{-1}}{2} = \pm \omega_0 i$$

$u(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$ - общее решение

Билет

Кеплерова задача

„Какова будет траектория планеты если сила тяготения обратно пропорциональна квадрату её расстояния от солнца?"

Ответ: эллипс

Докажем:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - f\frac{m_1 m_2}{r} = const$$ (з. сохранения энергии)

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$M = mr^2\dot{\varphi} = const$ [з. сохранения момента]

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} - f\frac{m_1 m_2}{r} \quad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + f\frac{m_1 m_2}{r}\right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}} = \frac{dr}{dt}$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + f\frac{m_1 m_2}{r}\right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + f\frac{m_1 m_2}{r}\right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + const$$

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt \quad \left[M = mr^2\frac{d\varphi}{dt} \quad d\varphi = \frac{M\,dt}{mr^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \int \frac{M\,dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + f\frac{m_1 m_2}{r}\right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + const \quad (3)$$

Модель коллективизации
Краснобуженкова (выборы)
„телевизор"

$M=1$

из (1) $\Rightarrow$

$$E + f\frac{m_1 m_2}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} \geq 0 \quad \frac{mr^2}{2} = E + f\frac{m_1 m_2}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} \geq 0$$

или

$$2mEr^2 + 2mm_1m_2fr - M^2 \geq 0 \qquad (2)$$

(2) имеет смысл, если $D \geq 0$

$$D = 4m^2m_1^2m_2^2f^2 + 8M^2mE \geq 0$$ [очевидно $D<0$ нер-во не выполняется]

$$E \geq \frac{-4m^2m_1^2m_2^2f^2}{2\cdot 4M^2m}$$

$\Downarrow$

$$r_1^* + r_2^* = \frac{-m_1m_2f}{E}, \quad r_1^* r_2^* = \frac{-M^2}{2mE}$$

$E<0 \Rightarrow r_1^*, r_2^* > 0$
$E>0 \Rightarrow r_1^* < 0,\ r_2^* > 0$ [$r_2^* > r_1^*$]

Вернемся к (3)

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{mm_1m_2f}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2m_1^2m_2^2f^2}{M^2}}} + const$$

① начало отсчета φ: $const = 0$

② $p = \frac{M^2}{mm_1m_2f}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m^2m_1^2m_2^2f^2}}$

$$M\left(\frac{1}{r} - \frac{mm_1m_2f}{M^2}\right)$$

$$= \arccos \frac{\left(\frac{M}{r} - \frac{mm_1m_2f}{M^2}\right) M}{\frac{2mEM^2}{M^2}} \qquad M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{2EM^2}{m^2m_1^2m_2^2f^2}$$

$$\frac{m^3m_1^2m_2^2f^2}{M^2} \qquad \frac{1}{m}$$

стр 2

Билет

...тивного поведение

$$\frac{M}{r} - \frac{m m_1 m_2 f}{M} =$$

$$= \frac{M}{r} - \frac{m m_1 m_2 f M}{M^2} = \frac{M}{r} - \frac{M}{p} = M\frac{(p-r)}{rp}$$

$$2mE + \frac{m^2 m_1^2 m_2^2 f^2}{M^2} =$$

$$= \frac{m^2 m_1^2 m_2^2 f^2}{M^2}\left(\frac{2E M^2}{m^2 m_1^2 m_2^2 f^2} + 1\right) =$$

$$= \frac{mM^2}{p^2}\left(\frac{2EM^2}{\;} + \frac{1}{m}\right)$$

$$\frac{\cancel{M}(p-r)\cancel{p}}{r\cancel{p}\cancel{M}e} = \cos\varphi$$

$$p - r = re\cos\varphi$$

$$\frac{p}{r} - 1 = e\cos\varphi$$

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$$ — p - параметр, e - эксцентриситет орбиты

ур-е ~~каноническогого~~ сечения с фокусом в начале координат

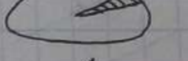
стр 3

1) $E<0$, $e<1$ эллипс
2) $E=0$, $e=1$ ~~гипербола~~ парабола
3) $E = E_{min} = -\frac{m m_1^2 m_2^2 f^2}{2M^2}$, $e=0$, окружность
4) $E>0$, $e>1$, гипербола

(IV) Вывод закона всемирного тяготения.

Законы Кеплера.

1) Планеты вращаются вокруг Солнца по эллиптическим траекториям, в фокусе которых Солнце

2) За равные промежутки времени радиус-вектор планеты заметает равные площади 

3) Квадраты времени обращения планет вокруг своей оси пропорциональны кубам больших осей их орбит.

Будем считать, что потенциальная энергия является однородной ф-цией степени k.

Ф-ция однородна, если: $F(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)=\lambda^k F(x_1,\dots,x_n)$,

для нас это значит, что

$$U(\lambda\vec{r}_1-\lambda\vec{r}_2,\lambda\vec{r}_2-\lambda\vec{r}_3,\dots,\lambda\vec{r}_{N-1}-\lambda\vec{r}_N)=$$
$$=\lambda^k U(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_{N-1}-\vec{r}_N)$$

Введем обозначения:

$$\vec{r}_i=\lambda\vec{\rho}_i$$
$$t=\mu\tau$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}=\frac{\lambda}{\mu}\vec{u},\ \text{где}\ u_i=\frac{d\rho_i}{d\tau}$$

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i u_i^2}{2} - \lambda^k U(\vec{p}_1 - \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_{N-1} - \vec{p}_N)$$

$\frac{\lambda^2}{\mu^2} = \lambda^k$ (мы хотим, чтобы ф-ция лагранжа тоже была однород.)

$\mu = \lambda^{1 - \frac{k}{2}}$

$$\frac{t}{\tau} = \left(\frac{r}{p}\right)^{1-\frac{k}{2}} \xrightarrow{\text{III закон Кеплера}} \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 = \left(\frac{r}{p}\right)^3$$

$$\mu = \frac{t}{\tau} = \left(\frac{r}{p}\right)^{3/2} = \lambda^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^{1-\frac{k}{2}} = \lambda^{\frac{3}{2}} \Rightarrow k = -1$$

Задача. 2 взаимодействующих точки.

$m_1 \; \vec{r}_1$ и $m_2 \; \vec{r}_2$

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$$

Поместим начало координат в центр инерции:

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 & \text{(т.е. наша система покоится как целое)} \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = r & \text{(вектор взаимного расположения)} \end{cases}$$

Теперь $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$

$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$

Теперь ф-ция лагранжа будет выглядеть так:

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(r), \text{ где } v = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

[Свели задачу о движении 2 масс к движению одной приведённой массы]

$$\Rightarrow L = \underbrace{\frac{m_1 m_2^2}{2\cdot(m_1+m_2)^2} v^2}_{m_1(\dot{r}_1)^2/2} + \underbrace{\frac{m_1^2 m_2}{2\cdot(m_1+m_2)^2} v^2}_{m_2(\dot{r}_2)^2/2} - U(r)$$

Центральными силами назыв. силы такие, что $\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \frac{\alpha \vec{r}}{\underbrace{\alpha(r)}_{\text{что-то там}}}$ (мы считаем, что наши массы двигаются в таком $U(r)$)

Пример: $\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial U(\overbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}^{\xi})}{\partial r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) =$

$$= \left(\frac{dU}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{dU}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{dU}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}\right) = \frac{dU}{d\xi}\left(\frac{x}{\xi}, \frac{y}{\xi}, \frac{z}{\xi}\right) =$$

$$= \frac{dU}{\xi d\xi} \underbrace{(x, y, z)}_{\vec{r}}$$

$\boxed{\text{Лекция V.}}$

Мы уже получили $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \alpha \vec{r}$ и то, что

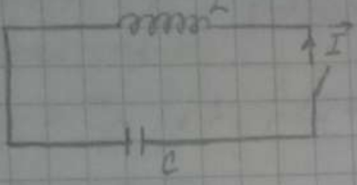
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{r} \times \vec{r}]\,\alpha = 0 \cdot \alpha = 0.$$

При движении в центральном поле сохраняется проекция момента на $\forall$ ось, проходящую через центр, т.е. сохр. вектор $\vec{M}$ момента, определяемого относит. центра поля. $\vec{M}$ постоянен относ. центра поля $\Rightarrow$ траектория движения будет оставаться в пл-ти, перпендик. $\vec{M}$ $\Rightarrow$ введём пл-ть с центром поля.

Билет

Билет

Колебания в электрическом контуре – формулировка модели, вывод уравнение и его решение.



- $t=0$ цепь замыкается
- ∄ сопротивление проводов $=0$.

- $q(t)$ – заряд на обкладках конденсатора.

Уравнение для $q(t)$?

$I(t)$, $U(t)$
ток, напряжение

$U(t) = q(t)/C$

емкость конденсатора = величине заряда, кот необходимо поместить на обкладки конденсатора для увеличение разности потенциалов между ними на 1).

$\nexists R \Rightarrow$ падение напр-я на проводах нет $\Rightarrow$
ΔU подается на катушку

$\mathcal{E} = -L\dfrac{dI}{dt}$ – самоиндукция на катушке

$$\underbrace{U(t) = -\mathcal{E}(t)}_{\text{з Ома для } \nexists R} \iff q(t)/C = -\mathcal{E}(t) = L\frac{dI}{dt}$$

т.к. $I = -\dfrac{dq}{dt} \Rightarrow L\dfrac{d^2q}{dt^2} = -\dfrac{q}{C}$

полностью определяется их расположением в пространстве. Это вполне согласуется с опытными данными и с принципом относительности Галилея.

Обозначим вышеупомянутую функцию через $-U_в(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$. Тогда

$$L = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U_в(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N). \tag{2.12}$$

Первое слагаемое в (2.12)

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$$

называют в механике кинетической энергией, а функцию $U_в$ — потенциальной энергией системы.

Теперь мы можем составить уравнения движения замкнутой системы материальных точек:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, N,$$

$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \right)$

или, подставляя сюда (2.12),

II закон Ньютона

$$\boxed{m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial U_в}{\partial \mathbf{r}_\alpha},} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.13}$$

Уравнения движения в такой форме называются уравнениями Ньютона. Вектор

$$\mathbf{F}_\alpha = -\frac{\partial U_в}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \tag{2.14}$$

называется силой, действующей на α-ю материальную точку системы.

Рассмотрим теперь замкнутую систему C, представляющую собой объединение двух систем A и B, причем движение одной из них задано (например, B). Тогда система A, рассматриваемая отдельно, не будет замкнутой. Для того чтобы построить функцию Лагранжа системы A, выпишем функцию Лагранжа системы C

$$L_C = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \sum_{\beta=1}^{\beta_0} \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} - U_в(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{\alpha_0}; \boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_{\beta_0}),$$

где $\mathbf{r}_\alpha$ — радиус-векторы точек системы A, а $\boldsymbol{\rho}_\beta$ — радиус-векторы точек системы B, причем $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$, $\mathbf{v}_\beta = \dot{\boldsymbol{\rho}}_\beta$.

Теперь, очевидно, нужно в выражение для L_C подставить заданные функции времени $\boldsymbol{\rho}_\beta(t)$, отбросить член, представляющий кинетическую энергию системы B (так как он является явной функцией времени и поэтому может рассматриваться как полная производная от некоторой другой функции времени), и мы получим функцию Лагранжа системы A

$$L_A = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U_в[\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{\alpha_0}; \boldsymbol{\rho}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\rho}_{\beta_0}(t)].$$

Таким образом, движение системы во внешнем поле описывается функцией Лагранжа, по форме совпадающей с функцией Лагранжа замкнутой системы, но с тем отличием, что теперь потенциальная энергия системы может зависеть явно от времени.

2.3. Законы сохранения

Свойства однородности и изотропности пространства и времени приводят к чрезвычайно важным понятиям, имеющим глубокий физический смысл. Каждому из этих свойств может быть поставлен в соответствие интеграл движения, представляющий собой закон сохранения некоторой величины, играющей в механике фундаментальную роль.

Начнем с закона сохранения, обусловленного однородностью времени. Однородность времени означает, что функция Лагранжа замкнутой системы не зависит явно от времени. Тогда полная производная функции Лагранжа по времени будет иметь вид

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\mathbf{v}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\dot{\mathbf{v}}_\alpha. \tag{2.15}$$

$+ \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Выразим из уравнений Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha}$ через $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}$ и подставим в (2.15). Получим

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{v}_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{dL}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\dot{\mathbf{v}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \mathbf{v}_\alpha\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{a=1}^{N} \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L\right) = 0,$$

откуда

$$\sum_{a=1}^{N} \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L = \text{const}. \tag{2.16}$$

Таким образом, величина

$$E = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L \equiv \sum_{a=1}^{N} m_a v_a^2 - L \tag{2.17}$$

остается неизменной при движении замкнутой системы. Эта величина называется энергией системы. Так как при выводе этого закона сохранения использовалось лишь отсутствие явной зависимости функции Лагранжа от времени, то очевидно, что для систем, помещенных в статическое внешнее поле, этот закон также имеет место. Механические системы, энергия которых сохраняется, называют **консервативными**.

Подставляя в (2.17) выражение функции Лагранжа для замкнутой системы материальных точек, получим следующее выражение для энергии:

$$E = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2} + U_{\text{в}}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N). \tag{2.18}$$

Отсюда видно, что энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной энергии, зависящей только от координат точек системы.

Обратимся теперь к свойству однородности пространства. С этим свойством связан не менее важный закон сохранения. Однородность пространства относительно замкнутой механической системы означает неизменность свойств системы при любом ее параллельном переносе как целого:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \boldsymbol{\rho}, \tag{2.19}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — некоторый постоянный вектор сдвига.

Формально это означает, что вид функции Лагранжа не изменится при подстановке (2.19). Имеем

$$L(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) = L(\mathbf{r}'_1 + \boldsymbol{\rho}, \ldots, \mathbf{r}'_N + \boldsymbol{\rho}; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N).$$

В силу независимости L от ρ получаем следующее условие:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \tag{2.20}$$

Суммируя левые и правые части уравнений Лагранжа и учитывая (2.20), находим, что

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0,$$

откуда

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \text{const}. \tag{2.21}$$

Таким образом, в замкнутой механической системе векторная величина $\mathbf{P}$, называемая импульсом системы, остается неизменной при движении. Дифференцируя функцию Лагранжа по $\mathbf{v}_a$, найдем, что импульс системы следующим образом выражается через скорости точек системы:

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a. \tag{2.22}$$

Соотношение (2.20) имеет простой физический смысл. Производная $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = -\dfrac{\partial U_{\text{в}}}{\partial \mathbf{r}_a}$ есть сила $\mathbf{F}_a$, действующая на a-ю частицу системы. Следовательно, равенство (2.20) означает, что сумма сил, действующих на все частицы **замкнутой системы**, равна нулю:

$$\sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a = 0.$$

III закон Ньютона

В случае системы, состоящей всего из двух точек, это приводит к закону равенства действия и противодействия.

Равенство (2.20) можно переписать в виде

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{\partial U_{\text{в}}}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \tag{2.23}$$

Это равенство накладывает определенные ограничения на вид зависимости $U_{\text{в}}$ от координат частиц системы. Как известно из теории уравнений в частных производных первого порядка, общим решением уравнения (2.23) является произвольная функция первых интегралов следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$d\mathbf{r}_a - d\mathbf{r}_{a+1} = 0, \quad a = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Первыми интегралами этой системы являются

$$\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{a+1} = \mathbf{c}_a, \quad a = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Таким образом,

$$U_{\text{в}} = U_{\text{в}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \ldots, \mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N). \tag{2.24}$$

Это означает, что потенциальная энергия замкнутой системы материальных точек зависит от взаимного положения точек системы. Если движение описывается обобщенными координатами q_i, то производные функции Лагранжа по обобщенным скоростям

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.25}$$

называются **обобщенными импульсами**, а производные по обобщенным координатам

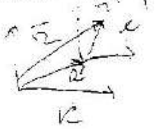
$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.26}$$

называются **обобщенными силами**. В этих обозначениях уравнения Лагранжа имеют вид

$$\dot{p}_i = F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.27}$$

В общем случае величины p_i являются линейными однородными функциями обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, отнюдь не сводящимися к произведениям массы на скорость.

Очевидно, что в разных инерциальных системах отсчета импульс механической системы имеет разные значения. Если система K' движется относительно системы K со скоростью $\mathbf{V}$, то



$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_{a=1}^{N} m_a,$$

или

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_{a=1}^{N} m_a. \tag{2.28}$$

Отсюда следует, что можно выбрать такую инерциальную систему отсчета K', в которой полный импульс механической системы равен нулю. Положив в (2.28) $\mathbf{P}' = 0$, найдем, что скорость этой системы отсчета равна

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum\limits_{a=1}^{N} m_a} = \frac{\sum\limits_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a}{\sum\limits_{a=1}^{N} m_a}. \tag{2.29}$$

Говорят, что механическая система покоится относительно некоторой системы отсчета, если ее импульс равен нулю в этой системе отсчета. Скорость из (2.29) естественно назвать скоростью движения механической системы как целого. Так как $\mathbf{v}_a = \dfrac{d\mathbf{r}_a}{dt}$, то (2.29) можно представить в виде

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum\limits_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_a}{\sum\limits_{a=1}^{N} m_a}\right).$$

Если теперь ввести радиус-вектор $\mathbf{R}$ некоторой точки по формуле

$$\mathbf{R} = \frac{\sum\limits_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_a}{\sum\limits_{a=1}^{N} m_a}, \tag{2.30}$$

то, как легко видеть,

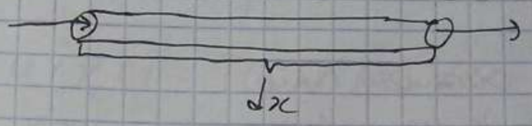
$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}. \tag{2.31}$$

Таким образом, скорость системы как целого есть скорость перемещения в пространстве точки, радиус-вектор которой определяется по формуле (2.30). Эту точку называют **центром инерции системы**. Это понятие имеет важное методологическое значение. Наличие у механической системы центра инерции делает содержательным понятие материальной точки. Действительно, в природе не существует ничего, что в точности являлось бы материальной точкой, так как все реальные тела имеют конечные размеры, и тот факт, что движение механической системы как целого происходит так же, как движение некоторой точки, в которой сосредоточена вся масса системы, является оправданием понятия материальной точки и свидетельствует о его плодотворности.

(II) Уравнение параболического типа (перенос массы/тепла)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x,t)$$

коэфф. температуропроводности



j – поток тепла, $[j] = \frac{Дж}{м^2 \cdot с}$ – кол-во энергии (тепла), которое поступает через единицу площади за единицу времени

$[C] = \frac{Дж}{кг \cdot град}$

$-j(x+dx, t) \cdot S\,dt$ – тепло, которое вышло

$j(x,t) \cdot S \cdot dt$ – тепло, которое вошло

$(j(x,t) - j(x+dx,t)) \cdot S\,dt$ – тепло, которое в стержне осталось.

масса этого стержня: $\rho \cdot S \cdot dx \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для нагрева нужно $c \cdot \rho \cdot S \cdot dx$

$u(x,t)$ – температура в точке x в момент t.

$$(j(x,t) - j(x+dx,t))\,S\,dt = \rho\, S\, dx \cdot c \cdot (u(x,t+dt) - u(x,t))$$

$j = -k \frac{\partial u}{\partial x}$ – закон Фурье

k – коэфф. теплопроводности.

Сократим на S, а разность $u(x,t+dt) - u(x,t)$ разложим в ряд.

$$\left(k(x+dx,t)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx,t} - k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x,t}\right)dt =$$
$$= c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dt\,dx$$

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx\,dt = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,dx$$

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u}{\partial x}$$

считаем, что k не завис. от x.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

коэфф. температуропроводности

Если бы стенки были теплопроницаемыми?

Добавилось бы и „что-то" $F(x,t)$ и в уравнение итоговое: $f = \dfrac{F}{c\rho}$

Диффузия: все то же самое, закон Фурье бы заменили на закон Фика:

$$j = -D\frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$(7)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\dfrac{k}{c\rho}}_{=a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \nu_1(t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \nu_2(t) \end{cases} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

IV Задача №2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (1) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (2) \\ u(x,0) = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$\dot{u}_n(t) = -\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 u_n(t) + F_n(t), \quad n = 1, 2, \dots; \quad u_n(0) = 0.$$

P.S. $\dot{y} = -\lambda y + g(t) \Rightarrow y(t) = e^{-\lambda t}\left(y(0) + \int_0^t e^{\lambda t} g(\tau) d\tau\right) \Rightarrow$

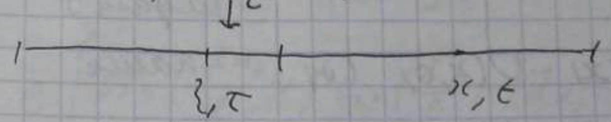
$$\Rightarrow u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\tau)} F_n(\tau) d\tau$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\tau)} F_n(\tau) d\tau \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad (4)$$

$$u(x,t) = \int_0^l \int_0^t G(x, \xi, t-\tau) F(\xi, \tau) d\xi \, d\tau \quad (5)$$

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\tau)} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \quad (6)$$

$G(x, \xi, t-\tau)$ — ф-ция мгновенного источника



в момент τ (в течение τ) поступило тепло в точку ξ.

$G(x, \xi, t-\tau)$ — это как поступившее тепло через $t-\tau$ будет нагревать точку x.

Лекция X. Задача №3 (общая)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) & (1) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (2) \\ u(0,t) = \mu_1(t) & (3) \\ u(l,t) = \mu_2(t) & (4) \end{cases}$$

I-ая краевая задача

$U(x,t)$: $\begin{cases} U(0,t) = \mu_1(t) \\ U(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$ — нам нужна такая ф-ция $U(x,t)$

$U(x,t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$ — например, так

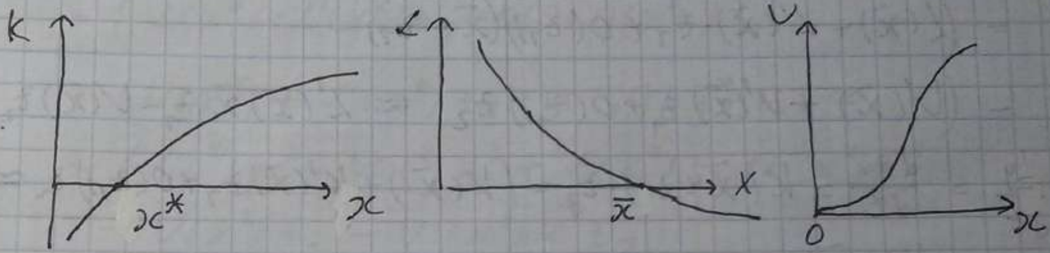
$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + U(x,t)$

Для $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ выпишем краевые задачи:

Модель Колмогорова.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = L(x)\cdot x - V(x)\cdot y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = K(x)\cdot y \end{cases}$$

L, V — нелинейные ф-ции



1) $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = 0$ (рассм. окр-ть нулевого равновесия)

$x - \tilde{x} = z_1 = x$

$y - \tilde{y} = z_2 = y$

$$\frac{dx}{dt} = L(z_1)\cdot z_1 - V(z_1)\cdot z_2 = \left(L(0) + L'(0) z_1 + o(z_1)\right) z_1 -$$

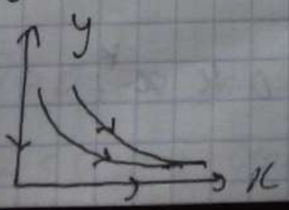
(2-ой и более порядок малости z_1^2 отбрасываем)

$$- \left(\overset{=0}{V(0)} + V'(0)\cdot z_1 + o(z_1)\right) z_2 \approx L(0) z_1$$

$$\frac{dy}{dt} = K(z_1) z_2 = \left(K(0) + K'(0) z_1 + o(z_1)\right) z_2 \approx K(0)\cdot z_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = L(0) z_1 \\[2mm] \dfrac{dz_2}{dt} = K(0)\cdot z_2 \end{cases} \qquad \frac{dz}{dt} = Az,\ A = \begin{pmatrix} L(0) & 0 \\ 0 & K(0) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = L(0) > 0 \\ \lambda_2 = K(0) < 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \text{седло.}$$



2) $\tilde{x}=\bar{x},\ \tilde{y}=0 \Rightarrow x-\tilde{x}=z_1=x-\bar{x} \Rightarrow x=z_1+\bar{x}$

$y-\tilde{y}=z_2=y$

$$\frac{dx}{dt}=L(\bar{x}+z_1)\cdot(\bar{x}+z_1)-V(\bar{x}+z_1)\cdot z_2=$$

$$=\big(\underbrace{L(\bar{x})}_{=0}+L'(\bar{x})\cdot z_1+O(z_1)\big)(\bar{x}+z_1)-$$

$$-\big(V(\bar{x})+V'(\bar{x})z_1+O(z_1)\big)z_2\approx L'(\bar{x})\bar{x}z_1-V(\bar{x})z_2$$

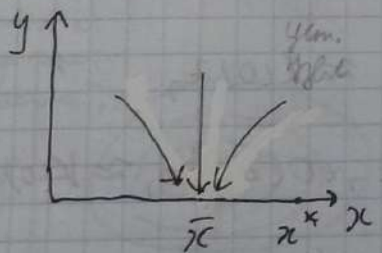
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dz_2}{dt}=K(\bar{x}+z_1)\cdot z_2=\big(K(\bar{x})+K'(\bar{x})z_1+O(z_1)\big)z_2\approx$$

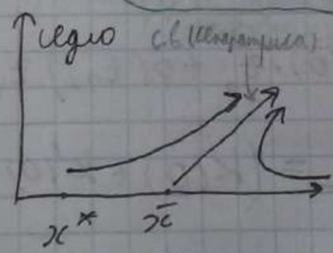
$$\approx K(\bar{x})z_2$$

$$\frac{dz}{dt}=Az;\quad A=\begin{pmatrix}L'(\bar{x})\bar{x} & -V(\bar{x})\\ 0 & K(\bar{x})\end{pmatrix}\qquad \lambda_1=L'(\bar{x})\bar{x}<0,\quad \lambda_2=K(\bar{x})$$

$\lambda_1<0$ всегда, $\lambda_2=\begin{cases}>0, & \bar{x}>x^*\\ <0, & \bar{x}<x^*\end{cases}$ $\Rightarrow$ устойчивый узел. при $x^*>\bar{x}$

при $\lambda_2>0$ имеем седло. (неуст. р/к)





3) $\tilde{x}=x^*,\ y^*=\dfrac{L(x^*)x^*}{V(x^*)}>0,\quad y=y^*$

отсюда

$\Rightarrow L(x^*)>0 \Leftrightarrow x^*<\bar{x}$

если $\bar{x}<x^* \Rightarrow$ 2 точки р/к: 0 и x^*.

$L(x^*)\cdot x^*-V(x^*)y^*=0$

40

$$z_1 = x - \tilde{x} = x - x^*$$
$$z_2 = y - \tilde{y} = y - y^*$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = L(x^* + z_1)\cdot(x^* + z_1) - V(x^* + z_1)\cdot(y^* + z_2) =$$
$$= \left(L(x^*) + L'(x^*)z_1 + o(z_1)\right)(x^* + z_1) -$$
$$-\left(V(x^*) + V'(x^*)z_1 + o(z_1)\right)(y^* + z_2) \approx$$
$$\approx \underbrace{L(x^*)x^* - V(x^*)y^*}_{=0} + L(x^*)z_1 + L'(x^*)x^* z_1 -$$
$$- V(x^*)z_2 - V'(x^*)y^* z_1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{dy}{dt} = K(x^* + z_1)(y^* + z_2) =$$
$$= \left(K(x^*) + K'(x^*)z_1 + o(z_1)\right)(y^* + z_2) \approx K'(x^*)y^* z_1$$

$$\frac{dz}{dt} = Az, \quad A = \begin{pmatrix} -\delta & -V(x^*) \\ K'(x^*)y^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = V'(x^*)y^* - L(x^*) - L'(x^*)x^*$$

Общее уравнение для поиска собственных значений:

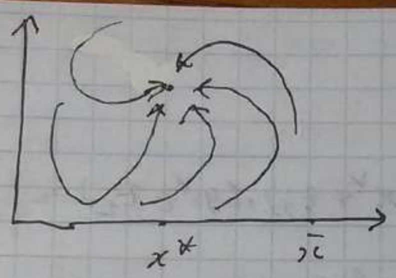
$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}A + \det A = 0$$
$$\lambda^2 + \delta\lambda + K'(x^*)y^* V(x^*) = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = \delta^2 - 4K'(x^*)y^* V(x^*)$$

по теореме Виета

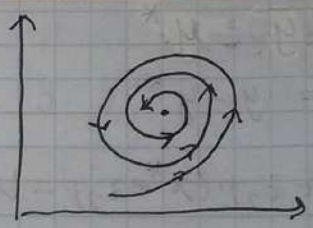
1) $D > 0 \Rightarrow$ оба первые положит $\Rightarrow$ узел

2) $D < 0 \Rightarrow$ фокус

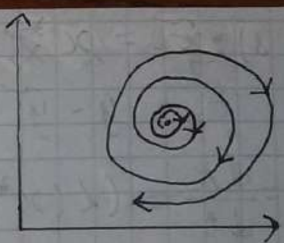
$\delta > 0$ – уст
$\delta < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ неуст.



узел устойчивый



фокус устойчивый



неустойчивый фокус

Бывает ещё полуустойчивый фокус: расходится от точки, но в какой-то момент закручивается.

Лекция VIII — Модели, связанные с УМФ.

Рассм. ф-цию $u(x,y)$

могут зависеть от x, y

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(u, u_x, u_y, x, y) = 0$$

↑ линейное ур-е, т.к. линейно по старшим пр-ным.

квазилинейное, если линейно по младшим пр-ным

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \Rightarrow$ ур-е гиперболическое

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \Rightarrow$ ур-е эллиптическое

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \Rightarrow$ ур-е параболическое

(I) Задача о колебании струны.

$F(x,t) \downarrow \; dl^2 = dx^2 + du^2 = dx^2(1+u_x^2) \approx dx^2$

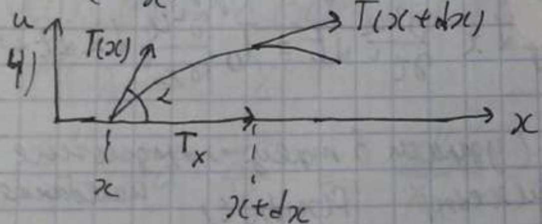
Упрощения:

1) отклонения небольшие

2) струна гибкая, т.е. не сопр. изменению своей формы (все силы реакции напр. по касат. ∥ Ox).

3) $(u_x)^2 \ll 1$

4)



$$T_x = T(x)\cdot\cos\alpha = \frac{dx\,T(x)}{\sqrt{dx^2+du^2}} = T(x)\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx$$

$$\approx T(x)\left(1 - \frac{1}{2}u_x^2 + du_x^2\right) \approx T(x)$$

$$T_u = T(x)\cdot\sin\alpha \approx T(x)\cdot tg\,\alpha = T(x)\,u_x, \quad u_x = \frac{du}{dx}$$

$$T(x) \approx T(x+dx) \approx T_0 = const$$

$$m\frac{dv}{dt} = f$$

$$m\,dv = f\,dt \qquad u_t = v \Rightarrow du_t = dv$$

$$\underbrace{\rho\,dx}_{dm}\underbrace{\left(-u_t(x,t) + u_t(x,t+dt)\right)}_{du_t} \approx$$

$$\approx \rho\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dt$$

струна не колеблется вдоль Ox

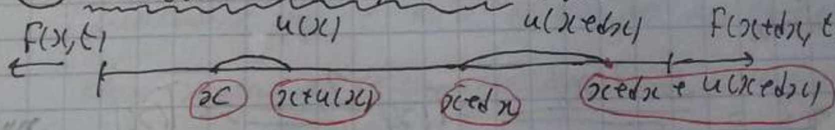
$$T_0\left(u_x(x+dx,t) - u_x(x,t)\right)dt = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,dt + F(x,t)\,dx\,dt$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$$

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

(Это получили из следующего:
$$\rho\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dt = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,dt + f\,dx\,dt\,)$$

II) Колебание стержня. (ударили в торец => продольные колебания).



Относ. удлин. эл-та $[x, x+dx]$

$$\frac{\left(x+dx+u(x+dx,t)\right) - \left(x+u(x,t)\right) - dx}{dx} \approx u_x(x,t)$$

$= (x+dx) - x$

$u(x,t)$ — смещение точки имеющей коорд. x в положении равновесия

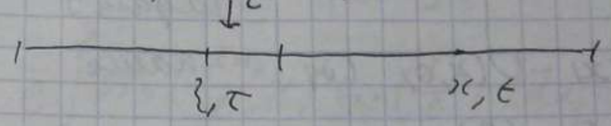
$$f = k(x)\,u_x(x,t)$$

$$\left(k(x+dx)\,u_x(x+dx,t) - k(x)\,u_x(x,t)\right)dt =$$

$$= \rho\,dx\underbrace{\left(u_t(x,t+dt) - u_t(x,t)\right)}_{dv}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x)\,u_x(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$G(x, \xi, t-\tau)$ – ф-ция мгновенного источника в момент τ (в точке τ) поступило тепло в точку ξ.



$G(x, \xi, t-\tau)$ – это как поступившее тепло через $t-\tau$ будет нагревать точку x.

$\boxed{\text{Лекция X.}}$ **Задача №3.** (общая)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) & (1) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (2) \\ u(0,t) = \mu_1(t) & (3) \\ u(l,t) = \mu_2(t) & (4) \end{cases}$$

I-ая краевая задача

$U(x,t): \begin{cases} U(0,t) = \mu_1(t) \\ U(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$ – нам нужна такая ф-ция $U(x,t)$

$U(x,t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$ – например, так

$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + U(x,t)$

Для $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ выпишем краевые задачи:

$$
\text{I}\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & (6)\\
u_1(x,0) = \varphi(x) = \Phi(x) - V(x,0) & (7)\\
u_1(0,t) = u_2(l,t) = 0 & (8)
\end{cases}
$$

задача I типа

$$
\text{II}\begin{cases}
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2} + f(x,t), \quad f(x,t) = F(x,t) + a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \dfrac{\partial V}{\partial t} & (9)\\
u_2(x,0) = 0 & (10)\\
u_2(0,t) = u_2(l,t) = 0 & (11)
\end{cases}
$$

задача II типа

Следствие 1.

$\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow$ решение упрощается.

Следствие 2.

Если $\mu_1 = const$, $\mu_2 = const$, то решение упрощается

Пример. (стержень длины l с температурами T_1 и T_2 на концах $\Rightarrow$ $u(0,t) = T_1$, $u(l,t) = T_2$)

$J(x) = J_0 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi n_0}{l} x\right) \left[\dfrac{Дж}{м \cdot с}\right]$ — внешний источник

$\Phi(x) = T_0 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi n_0}{l} x\right) + T_1 + \dfrac{x}{l}(T_2 - T_1)$ $[K]$ — нач. распр. тепла.

$$Scp \frac{\partial u}{\partial t} = S \cdot k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + J(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{J}{Scp}, \quad a^2 = \frac{k}{cp}, \quad F(x,t) = \frac{J_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi n_0}{l} x\right)}{Scp}$$

$c = \left[\frac{Дж}{кг \cdot К}\right]$, $\rho = \left[\frac{кг}{м^3}\right]$, кроме того вспомним, что

$$\frac{2}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n_0}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$ причем

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi,$$ где

$$\varphi(x) = T_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi n_0}{l}x\right) = \Phi(x) - V(x,0)$$

$$u_1(x,t) = T_0 e^{-\left(\frac{\pi n_0}{l}a\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n_0}{l}x\right)$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2(t-\tau)}F_n(\tau)d\tau\right)$$

$$F_n(\tau) = \frac{J_0}{sc\rho}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n_0}{l}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi = \begin{cases} \frac{J_0}{sc\rho}, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \frac{J_0}{sc\rho}\sin\left(\frac{\pi n_0}{l}x\right)\left(\frac{l}{\pi n_0 a}\right)^2\left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n_0}{l}a\right)^2 t}\right]$$

$$V = T_1 + \frac{x}{l}(T_2 - T_1), \quad f(x,t) = F(x,t) + a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = F(x,t)$$

при $t \to \infty$ $u_1 \to 0$, $u_2 = \frac{J_0}{sc\rho}\left(\sin\frac{\pi n_0}{l}x\right)\left(\frac{l}{\pi n_0 a}\right)^2$

Ответ: $u = u_1(x,t) + u_2(x,t) + V(x,t)$

Вывод телеграфных уравнений

$i(x,t)$ - сила тока
$u(x,t)$ - напряжение u_x - падение напр. на участке един. длины
R - сопротивление единицы длины проводника

По з-ну Кирхгофа

$$u_x dx + iR dx + i_t L dx = 0$$

Кол-во электричества, притекающее на у-т провода dx за время dt

$$[i(x,t) - i(x+dx,t)]\,dt \overset{T}{=} -i_x\,dx\,dt$$

(пренебрегаем потерей силы)

Кол-во электричества, необходимое для зарядки эл-та dx

$$C\cdot[u(x,t+dt) - u(x,t)]\,dx \overset{T}{=} C u_t\,dx dt$$, где C - ёмкость

$$u = q/C$$

$$C u_t\,dx dt = -i_x\,dx dt$$

$$\begin{cases} C u_t + i_x = 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ u_x + iR + i_t L = 0 & C\cdot\frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C u_{xt} + i_{xx} = 0 \\ C u_{xt} + CR\,i_t + CL\,i_{tt} = 0 \end{cases}$$

$$i_{tt} = \frac{1}{CL} i_{xx} - \frac{R}{L} i_t$$

Если пренебречь сопротивлением,

$$\begin{cases} i_{tt} = a^2 i_{xx} \\ u_{tt} = a^2 u_{xx} \end{cases}, \quad a = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$